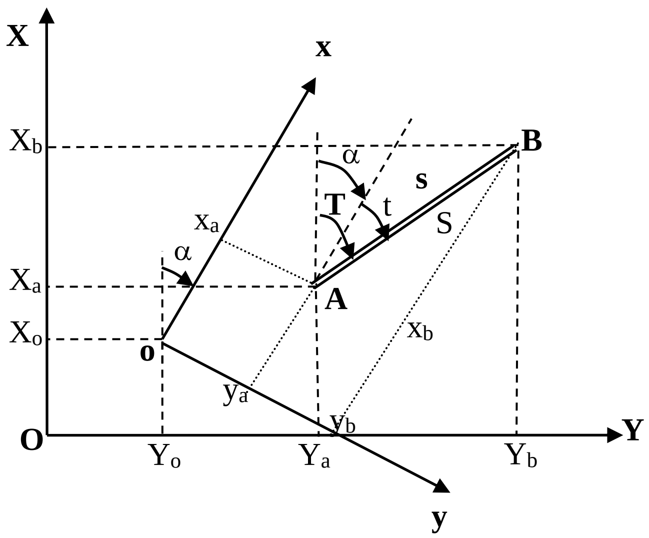
KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

Bir koordinat sisteminden başka bir koordinat sistemine geçiş işlemine koordinat dönüşümü (transformasyonu) denir. Koordinat değerleri de tıpkı ölçüler gibi hatalarla yüklüdür. Ölçü değerleri en azından rastgele hatalarla yüklü olduğu için bunlardan hesaplanan koordinat değerleri de hatalı olacaktır. Bu nedenle uygulamada cebrik dönüşüm yerine gereğinden fazla sayıda ortak nokta alınarak dönüşüm hesabı dengelemeli olarak gerçekleştirilir. Dönüşüm işleminde kullanılan koordinatlar farklı duyarlıkta olabileceği gibi genellikle de korelasyonlu büyüklüklerdir. Bu nedenle koordinat dönüşüm işlemlerinde bu durumun stokastik modele yansıtılması gerekir. Ancak uygulamada hesap kolaylığı açısından genellikle koordinatlar eşit ağırlıklı ve korelasyonsuz olarak kabul edilir yani P ağırlık matrisi birim matris olarak alınır. Koordinat sistemlerinin çokluğu ve çeşitliliği nedeniyle dönüşüm hesapları jeodezide önemli bir yer tutmaktadır. Burada düzlem dik koordinat sistemleri arasındaki benzerlik (konform), afin ve projektif dönüşümler ile üçboyutlu dik koordinat sistemleri arasında benzerlik dönüşüm işlemleri cebrik ve dengelemeli olarak nasıl yapılacağı sayısal uygulamalı olarak gösterilecektir.

Düzlem Dik Koordinat Sistemleri Arasında Dönüşüm



Genelde dönüşüm işlemlerinde koordinat sistemleri;

x , y ; verilmiş (eski) koordinat sistemi,
X , Y ; dönüşümle hesaplanacak (yeni) koordinat sistemi olarak adlandırılır.

Benzerlik Dönüşümü
Benzerlik dönüşümünde açılar değişmez yani şekil korunur. Benzerlik dönüşümünde iki dik koordinat sisteminin birbirlerine göre durumları dört datum parametresi ile açıklanmaktadır. Bunlar; koordinat eksenleri yönünde iki öteleme (x_o, y_o) , bir dönüklük (α) ve bir ölçek (q) parametreleridir. Yan nokta hesabında olduğu gibi iki koordinat sistemi arasında dönüşüm eşitlikleri şekilden aşağıdaki gibi çıkarılır.

$$Y_p = y_o + x_p \sin\alpha + y_p \cos\alpha \qquad X_p = x_o + x_p \cos\alpha - y_p \sin\alpha$$

Her iki koordinat sistemindeki iki nokta arasındaki uzaklık farklı ise bu durumda ölçek değişikliği de söz konusudur. İki nokta arasında (Y , X) sistemindeki uzaklık S, (y,x) sistemindeki uzaklık s ile gösterilirse

$$q = \frac{S}{s}$$

değerine ölçek faktörü denilir. Bu nedenle, dönüşüm hesabında eski (y,x) sistemindeki tüm uzunlukların q ile çarpılması gerekir.

$$Y_p = y_o + x_p q \sin\alpha + y_p q \cos\alpha \qquad X_p = x_o + x_p q \cos\alpha - y_p q \sin\alpha$$

şekline girer. Belirli bir alandaki dönüşüm işleminde α dönüklük açısı ve q ölçek faktörü sabit büyüklükler olduğundan

$b_1 = q \cos \alpha$ $\qquad$ $b_3 = X_o$
$b_2 = q \sin \alpha$ $\qquad$ $b_4 = Y_o$

kısaltmalar kullanılarak dönüşüm formülleri yeniden yazılırsa

$$Y_p = b_2 x_p + b_1 y_p + b_4$$
$$X_p = b_1 x_p - b_2 y_p + b_3$$

olur. Bu formüllerin kullanılabilmesi için düzlem koordinatlarından başka, x_o, y_o orijin noktasının koordinatları, q ölçek faktörü ve α dönüklük açısının bilinmesi gerekir. Uygulamada bu dört büyüklük her iki koordinat sisteminde verilen iki ortak noktanın koordinatları ile hesaplanır. Ortak bu iki noktayı birleştiren doğruya dönüşüm ekseni denir. A ve B noktaları bu eksenin uç noktalarıdır. Verilen bu A ve B noktaları arasındaki uzaklık S ve s temel ödev 2 ile hesaplanır. Bu değerlerle ölçek faktörü q = S/s elde edilir. S ve s arasındaki f_S = $S - s$ farkı belirli sınırları geçmemelidir. Yine temel ödev 2 ile T ve t açıklık açıları dolayısıyla eksenler arasındaki α dönüklük açısı da $\alpha = T - t$ kolaylıkla elde edilmektedir. Dönüşüm işleminin parametreleri olan

$$b_2 = q \sin\alpha = \frac{S}{s} \sin(T - t)$$

formülünde parantez açılırsa,

$$b_2 = \frac{S}{s}(\sin T \cos t - \cos T \sin t)$$

ve sin t, cos t yerine değerleri yazılırsa

$$b_2 = \frac{(Y_b - Y_a)(x_b - x_a) - (X_b - X_a)(y_b - y_a)}{s^2}$$

değeri elde edilir. Benzer şekilde

$$b_1 = \frac{(X_b - X_a)(x_b - x_a) + (Y_b - Y_a)(y_b - x_a)}{s^2}$$

değeri elde edilir. Veya;

$$b_1 = \frac{\Delta X \Delta x + \Delta Y \Delta y}{s^2} \qquad b_2 = \frac{\Delta Y \Delta x - \Delta X \Delta y}{s^2}$$

elde edilir. Eğer orijin noktası koordinatları Y_o , X_o hesaplanmak istenirse ortak noktaların her iki sistemdeki koordinatlarından yararlanarak (sözgelimi A noktasından),

$$Y_o = b_4 = Y_a - b_2 x_a - b_1 y_a$$
$$X_o = b_3 = X_a - b_1 x_a + b_2 y_a$$

şeklinde hesaplanır. İki koordinat sistemi arasındaki

Ölçek katsayısı : $q = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

Dönüklük açısı : $\alpha = \text{arc tan} \ (b_2 / b_1)$ dir.

DENGELEMELİ BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ

Her iki sistemde koordinatları bilinen iki noktanın var olması dönüşüm işleminin cebrik olarak gerçekleştirilmesi için yeterlidir. Ortak nokta sayısının ikiden fazla olması halinde dengeleme işlemi yapılır. Bu amaçla, temel dönüşüm eşitliklerinden;

$$Y_p = b_2 x_p + b_1 y_p + b_4$$
$$X_p = b_1 x_p - b_2 y_p + b_3$$

yararlanarak yalnız ikinci sistemdeki koordinat değerleri hatalı olarak kabul edilir ve dönüşümün fonksiyonel modeli dolaylı ölçüler dengelemesinde olduğu gibi

$$Y_p + v_{Yp} = b_2 x_p + b_1 y_p + b_4$$
$$X_p + v_{Xp} = b_1 x_p - b_2 y_p + b_3 \qquad (p = 1,2,...,n)$$

olur.

Ortak nokta sayısının (n) olması durumunda her nokta için iki denklem yazılacağından toplam denklem sayısı (2n) olur. Bilinmeyen dönüşüm parametreleri sayısı, (b_1, b_2, b_3, b_4) dengelemeli benzerlik dönüşümü için her zaman (4) tür.

Matris gösterimiyle fonksiyonel model

Fonksiyonel model $v = A\,x - l$ Stokastik Model P = E

$$\begin{bmatrix} v_{Y1} \\ v_{X1} \\ v_{Y2} \\ v_{X2} \\ .. \\ .. \\ v_{Yn} \\ v_{Xn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & -y_1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & -y_2 & x_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & 0 & x_n & y_n \\ 0 & 1 & -y_n & x_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1 \\ X_1 \\ Y_2 \\ X_2 \\ .. \\ .. \\ Y_n \\ X_n \end{bmatrix}$$

v = A x - l

Dengelemenin ilkesi $[vv] = v^T v = \min.$

$A^T A x - A^T l = 0$ *: normal denklemler*

$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T l$: x bilinmeyenler vektörü,dönüşüm parametreleri

bilinmeyenler bulunduktan sonra $v = A\,x - l$ eşitliğinden ortak nokta koordinatlarına getirilecek düzeltmeler hesaplanır. Yeni noktaların dönüştürülmesinde dengelemeli olarak bulunan dönüşüm parametreleri kullanılır.

Uyarı : Tüm koordinat dönüştürme işlemlerinde, koordinatlar büyük sayılardan oluşuyorsa hesaplama işlemleri bilgisayar ortamında çift duyarlıklı (16 basamak) olarak gerçekleştirilse bile duyarlık kaybı olmaktadır. Bu nedenle verilen ortak nokta koordinatlarının aşağıdaki gibi ayrı ayrı ağırlık merkezine ötelenerek kullanılmaları dolayısıyla daha küçük koordinatlarla çalışılacağından yukarıda bahsedilen duyarlık kaybını nispeten önleyecektir. Bu öteleme işlemi yapıldığında iki sistem arasındaki dönüşüm parametreleri orjinal koordinatlar arasında olması gerekenlerden farklı çıkacaktır. Ancak dönüşüm sonucunda her iki durumda da aynı koordinatlar elde edilecektir. Ötelenmiş koordinatlarla çalışılıyorsa, koordinatları ikinci sisteme dönüştürülmek istenen noktalarda önceden hesaplanan ait oldukları sistemin ağırlık merkezine ötelenmelidir. Dönüştürme işlemiyle bulunan ikinci sistem koordinatları da ikinci sistemin ağırlık merkezine ötelenmiş koordinatlar olacaktır. İkinci sistemdeki orjinal koordinatları bulmak için hesaplanan koordinatlara daha önce hesaplanmış olan ikinci sistemin ağırlık merkezinin koordinatları eklenmelidir.

Ortak nokta koordinatları

I. sistem		***II.sistem***	
y	**x**	**Y**	**X**
y_1	x_1	Y_1	X_1
y_2	x_2	Y_2	X_2
y_n	x_n	Y_n	X_n

I. ve II. Sistem koordinatların ağırlık merkezleri

$$y_o = \frac{[y]}{n} \qquad x_o = \frac{[x]}{n} \qquad Y_o = \frac{[Y]}{n} \qquad X_o = \frac{[X]}{n}$$

ağırlık merkezlerine ötelenmiş koordinatlar

$y'_i = y_i - y_o$ $x'_i = x_i - x_o$ $Y'_i = Y_i - Y_o$ $X'_i = X_i - X_o$

Duyarlık hesapları

Benzerlik dönüşüm işleminde birim ölçünün ortalama hatası ya da x, y ortak koordinatlarından herhangi birinin ortalama hatası

$$m_o = \pm\sqrt{\frac{[v_x v_x + v_y v_y]}{2n-4}}$$

bir P noktasının konum hatası

$$m_P = \pm m_o\sqrt{2} = \pm\sqrt{\frac{[v_x v_x + v_y v_y]}{n-2}}$$

dönüşüm parametrelerinin ortalama hataları $Q=(A^TA)^{-1}$ matrisinin ilgili köşegen elemanlarından yararlanarak

$m_{b4} = \pm m_o\sqrt{q_{44}}$ $m_{b3} = \pm m_o\sqrt{q_{33}}$ $m_{b2} = \pm m_o\sqrt{q_{22}}$ $m_{b1} = \pm m_o\sqrt{q_{11}}$

Sonuç Denetimleri

Dönüşüm işlemi için başlangıçta kurulan dönüşüm eşitliklerinin ortak noktalarda gerçekleşip gerçekleşmediğine bakılır.

$$Y_p + v_{Yp} \overset{?}{=} b_2 x_p + b_1 y_p + b_4$$

$$X_p + v_{Xp} \overset{?}{=} b_1 x_p - b_2 y_p + b_3 \qquad (p = 1,2,...,n)$$

ÖRNEK:

DENGELEMELİ BENZERLİK DÖNÜŞÜM

```
ortak nokta sayısı=       5
dönüşümü yapılacak nokta sayısı= 2
dönüşüm bilinmeyen sayısı=   4
ortak noktaların koordinatları
```

Nokta	Y1	X1	Y2	X2
248	9043.74	5208.79	4618.72	4068.83
257	9218.42	4833.49	5579.41	1115.6
253	9000	5000	4103.98	2553.38
124	9220.02	5166.91	5893.38	3597.03
125	9242.70	5039.38	5946.7	2626.7

Dönüştürülecek noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1
251	9106.17	5050.71
289	9066.86	4878.09

ÇÖZÜM:

A katsayılar matrisi

5208.790	-9043.740	1.000	0.000
4833.490	-9218.420	1.000	0.000
5000.000	-9000.000	1.000	0.000
5166.910	-9220.020	1.000	0.000
5039.380	-9242.700	1.000	0.000
9043.740	5208.790	0.000	1.000
9218.420	4833.490	0.000	1.000
9000.000	5000.000	0.000	1.000
9220.020	5166.910	0.000	1.000
9242.700	5039.380	0.000	1.000

-L Sabit Terimleri

-4068.830	-1115.600	-2553.380	-3597.030	-2626.700	-4618.720
-5579.410	-4103.980	-5893.380	-5946.700		

A^TA normal denklemler

545791201.1511	-0.0000	25248.5700	45724.8800
-0.0000	545791201.1511	-45724.8800	25248.5700
25248.5700	-45724.8800	5.0000	0.0000
45724.8800	25248.5700	0.0000	5.0000

$-A^TL$ VEKTÖRÜ

-310615605.286 -4459691.485 -13961.540 -26142.190

A^TA invers matrisi

0.0000	-0.0000	-0.0360	-0.0652
0.0000	0.0000	0.0652	-0.0360
-0.0360	0.0652	778.5143	0.0000
-0.0652	-0.0360	0.0000	778.5143

Dönüşüm bilinmeyenleri

b_1 = 7.446649975884813

b_2 = .906166941999491 $q = (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$ = 7.501582125 :ölçek katsayısı

b_3 =-26524.26969974668

b_4 =-67446.88120322212 $\alpha = \arctan(b_2/b_1)$ = 7.70898^g :dönüklük katsayısı

Düzeltmeler

NOKTA	Vx	Vy
248	-0.2020m.	-0.0016m.
257	0.0110	0.0047
253	0.0977	-0.1767
124	-0.0068	0.0835
125	0.1001	0.0901

[vv]= .10687

-[vl]= .10695

l^Tl-l^TAx =.10695

BİRİM ÖLÇÜNÜN ORTALAMA HATASI mo= 0.133m.

BİLİNMEYENLERİN ORTALAMA HATALARI

Mb1 = 0.0004 Mb2 = 0.0004

Mb3 = 3.7239 Mb4 = 3.7239

Dönüştürülen noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1	Y2	X2
248	9043.7400	5208.7900	4618.7184	4068.6280
257	9218.4200	4833.4900	5579.4147	1115.6110
253	9000.0000	5000.0000	4103.8033	2553.4777
124	9220.0200	5166.9100	5893.4635	3597.0232
125	9242.7000	5039.3800	5946.7901	2626.8001
251	9106.1700	5050.7100	4940.3658	2834.8896
289	9066.8600	4878.0900	4491.2155	1585.0703

AFİN DÖNÜŞÜMÜ

Afin dönüşümünde iki dik koordinat sisteminin birbirlerine göre durumları altı datum parametresi ile açıklanmaktadır. Bunlar; koordinat eksenleri yönünde iki öteleme (x_o, y_o) , iki dönüklük (α , β) ve eksenler yönünde iki ölçek (k, q) parametreleridir. Afin dönüşümünde iki koordinat sistemi arasında dönüşüm eşitlikleri aşağıda olduğu gibidir.

$Y_p = a_4 x_p + a_5 y_p + a_6$ (a_6 = Y_o)

$X_p = a_1 x_p + a_2 y_p + a_3$ (a_3= X_o)

Afin dönüşümünde ;

- açılar değişir yani şekiller dönüşümden sonra bozulur. Ancak doğrultuların paralelliği değişmez. Örneğin bir dikdörtgen şeklin afin dönüşümü sonucunda paralelkenar elde edilir.
- doğrultuya bağlı olarak ölçek değişir.
- geometrik şekillerin alanları dönüşümden sonra sabit bir miktar değişir. Bu sabit miktar dönüşüm matrisinin determinantına eşittir.

Benzerlik dönüşümü afin dönüşümünün özel bir durumudur. a_1= a_5 *ve* a_4= -a_2 olması halinde afin dönüşümü benzerlik dönüşümüne döner. Afin dönüşümünü cebrik olarak gerçekleştirebilmek için bilinmeyen 6 dönüşüm parametresi için 3 ortak noktanın her iki sistemde koordinatlarının bilinmesi yeterlidir. Ortak nokta sayısı 3 den fazla ise dengelemeli dönüşüm yapılır.Bu amaçla, temel dönüşüm eşitliklerinden;

$$Y_p = a_4 x_p + a_5 y_p + a_6$$

$$X_p = a_1 x_p + a_2 y_p + a_3$$

yararlanarak yalnız ikinci sistemdeki koordinat değerleri hatalı olarak kabul edilir ve dönüşümün fonksiyonel modeli dolaylı ölçüler dengelemesinde olduğu gibi

$$Y_p + v_{Yp} = a_4 x_p + a_5 y_p + a_6$$

$$X_p + v_{Xp} = a_1 x_p + a_2 y_p + a_3 \qquad (p = 1,2,...,n)$$

olur. Matris gösterimiyle; Fonksiyonel model *v = A x – l*

$$\begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{x1} \\ v_{y2} \\ v_{x2} \\ .. \\ .. \\ v_{yn} \\ v_{xn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1 \\ X_1 \\ Y_2 \\ X_2 \\ .. \\ .. \\ Y_n \\ X_n \end{bmatrix}$$

v = A x - *l*

Dengelemenin ilkesi [vv]= $v^T v$ = min.

$A^T Ax - A^T l = 0$ *: normal denklemler*

$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T l$: x bilinmeyenler vektörü,dönüşüm parametreleri

bilinmeyenler bulunduktan sonra *v = A x – l* eşitliğinden ortak nokta koordinatlarına getirilecek düzeltmeler hesaplanır. Yeni noktaların dönüştürülmesinde dengelemeli olarak bulunan dönüşüm parametreleri kullanılır.

İki koordinat sistemi arasındaki

Ölçek katsayıları : $k = \sqrt{a_1^2 + a_4^2}$ ve $q = \sqrt{a_2^2 + a_5^2}$

Dönüklük açıları : α = arc tan (a_4 / a_1) ve β = arc tan (a_5 / a_2)

dır.

ÖRNEK :

DENGELEMELİ AFİN DÖNÜŞÜMÜ

ortak nokta sayısı= 5
dönüşümü yapılacak nokta sayısı= 2
dönüşüm bilinmeyen sayısı= 6
ortak noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1	Y2	X2
248	9043.74	5208.79	4618.72	4068.83
257	9218.42	4833.49	5579.41	1115.6
253	9000.00	5000.00	4103.98	2553.38
124	9220.02	5166.91	5893.38	3597.03
125	9242.70	5039.38	5946.7	2626.7

Dönüştürülecek noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1
251	9106.17	5050.71
289	9066.86	4878.09

ÇÖZÜM:

A katsayılar matrisi

5208.790	9043.740	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	5208.790	9043.740	1.000
4833.490	9218.420	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	4833.490	9218.420	1.000
5000.000	9000.000	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	5000.000	9000.000	1.000
5166.910	9220.020	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	5166.910	9220.020	1.000
5039.380	9242.700	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	5039.380	9242.700	1.000

-L Sabit Terimleri

-4618.720	-4068.830	-5579.410	-1115.600	-4103.980	-2553.380
-5893.380	-3597.030	-5946.700	-2626.700		

A^TA normal denklemler

127586428.576	230880574.42	25248.5700	0.0000	0.0000	0.0000
230880574.424	418204772.57	45724.8800	0.0000	0.0000	0.0000
25248.5700	45724.8800	5.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.000	0.000	0.000	127586428.576	230880574.424	25248.57
0.000	0.000	0.000	230880574.424	418204772.574	45724.88
0.000	0.000	0.000	25248.5700	45724.880	5.000

$-A^TL$ VEKTÖRÜ

-131964110.092 -239440313.103 -26142.190 -71175292.183 -127504418.607 -13961.540

A^TA invers matrisi

0.0000	0.0000	-0.0972	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.2083	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0972	-0.2083	2395.4383	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0972
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.2083
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0972	-0.2083	2395.4383

Dönüşüm bilinmeyenleri :

a 1 = 7.447082845595432 a 2 = -.9063406822185527
a 3 = -26524.86671785125 a 4 = .905806220260349
a 5 = 7.445736921241585 a 6 = -67436.70979880872

ölçek katsayıları
$k = (a_1^2 + a_4^2)^{1/2} = 7.501968262$ $q = (a_2^2 + a_5^2)^{1/2} = 7.50069675$

dönüklük açıları
$\alpha = \arctan(a_4/a_1) = 7.705505428^g$ $\beta = \arctan(a_5/a_2) = -92.28861225^g$

Düzeltmeler

NOKTA	Vy	Vx
248	0.0334m	-0.1155m
257	0.0157	-0.0953
253	-0.0264	0.1014
124	-0.0273	0.0309
125	0.0046	0.0786

[vv]= 4.26693D-02
-[vl]= 4.27969D-02
l^Tl-l^TAx = 4.27970D-02

BİRİM ÖLÇÜNÜN ORTALAMA HATASI mo= 0.103m

BİLİNMEYENLERİN ORTALAMA HATALARI

Ma1 = 0.0004 Ma2 = 0.0005
Ma3 = 5.0550 Ma4 = 0.0004
Ma5 = 0.0005 Ma6 = 5.0550

dönüştürülen noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1	Y2	X2
248	9043.7400	5208.7900	4618.7534	4068.7145
257	9218.4200	4833.4900	5579.4257	1115.5047
253	9000.0000	5000.0000	4103.9536	2553.4814
124	9220.0200	5166.9100	5893.3527	3597.0609
125	9242.7000	5039.3800	5946.7046	2626.7786
251	9106.1700	5050.7100	4940.4009	2834.8968
289	9066.8600	4878.0900	4491.3487	1585.0096

PROJEKTİF DÖNÜŞÜM

Projektif dönüşüm daha genel bir dönüşüm olup, iki düzlemin paralel olup olmama durumuna ve izdüşümün merkezi veya paralel olmasına bakılmaksızın dönüşüm yapılır. Projektif dönüşümün önemli bir özelliği de çifte oranın değişmez kalmasıdır. Projektif dönüşümde iki dik koordinat sisteminin birbirlerine göre durumları sekiz parametre ile açıklanmaktadır. Projektif dönüşümde iki koordinat sistemi arasında dönüşüm eşitlikleri aşağıda olduğu gibidir.

$$Y_p = \frac{c_4 x_p + c_5 y_p + c_6}{c_7 x_p + c_8 y_p + 1} \qquad X_p = \frac{c_1 x_p + c_2 y_p + c_3}{c_7 x_p + c_8 y_p + 1}$$

($c_3 = X_o$) ($c_6 = Y_o$)

Afin dönüşümü projektif dönüşümün özel bir durumudur. $c_7 = c_8 = 0$ olması halinde projektif dönüşüm afin dönüşümüne döner. Projektif dönüşümü cebrik olarak gerçekleştirebilmek için bilinmeyen 8 dönüşüm parametresi için 4 ortak noktanın her iki sistemde koordinatlarının bilinmesi yeterlidir. Ortak nokta sayısı 4 den fazla ise dengelemeli dönüşüm yapılır.

Bu amaçla, temel dönüşüm eşitliklerinden;

$$Y_p = \frac{c_4 x_p + c_5 y_p + c_6}{c_7 x_p + c_8 y_p + 1} \qquad X_p = \frac{c_1 x_p + c_2 y_p + c_3}{c_7 x_p + c_8 y_p + 1}$$

yararlanarak dönüşümün fonksiyonel modeli dolaylı ölçüler dengelemesinde olduğu gibi

$$Y_p + v_{Yp} = \frac{c_4 x_p + c_5 y_p + c_6}{c_7 x_p + c_8 y_p + 1}$$

$$X_p + v_{Xp} = \frac{c_1 x_p + c_2 y_p + c_3}{c_7 x_p + c_8 y_p + 1} \qquad (p = 1,2,...,n)$$

olur. Matris gösterimiyle; fonksiyonel model $v = A\,x - l$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{x1} \\ v_{y2} \\ v_{x2} \\ .. \\ .. \\ v_{yn} \\ v_{xn} \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1Y_1 & -y_1Y_1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -y_1X_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2Y_2 & -y_2Y_2 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -y_2X_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x_nY_n & -y_nY_n \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_nX_n & -y_nX_n \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{bmatrix}}_{x} - \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ X_1 \\ Y_2 \\ X_2 \\ .. \\ .. \\ Y_n \\ X_n \end{bmatrix}}_{l}$$

Dengelemenin ilkesi [vv]= $v^T v$ = min.

$A^T Ax - A^T l = 0$: *normal denklemler*

$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T l$: x bilinmeyenler vektörü,dönüşüm parametreleri

bilinmeyenler bulunduktan sonra $v = A\,x - l$ eşitliğinden ortak nokta koordinatlarına getirilecek düzeltmeler hesaplanır. Yeni noktaların dönüştürülmesinde dengelemeli olarak bulunan dönüşüm parametreleri kullanılır.

Örnek : Aşağıda 5 ortak noktadan yararlanarak dengelemeli projektif dönüşüm yapılmak isteniyor problemi orijinal koordinatlarla ve ötelenmiş koordinatlarla ayrı ayrı çözünüz.

DENGELEMELİ PROJEKTİF DÖNÜŞÜM

```
ortak nokta sayısı=       5
dönüşümü yapılacak nokta sayısı= 2
dönüşüm bilinmeyen sayısı=   8

ortak noktaların koordinatları
```

Nokta	Y1	X1	Y2	X2
248	9043.74	5208.79	4618.72	4068.83
257	9218.42	4833.49	5579.41	1115.6
253	9000	5000	4103.98	2553.38
124	9220.02	5166.91	5893.38	3597.03
125	9242.70	5039.38	5946.7	2626.7

Dönüştürülecek noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1
251	9106.17	5050.71
289	9066.86	4878.09

Çözüm-1 : orijinal koordinatları kullanarak

A katsayılar matrisi

5208.790	9043.740	1	0	0	0	-21193681.016	-36797440.624
4833.490	9218.420	1	0	0	0	-5392241.444	-10284069.352
5000.000	9000.000	1	0	0	0	-12766900.000	-22980420.000
5166.910	9220.020	1	0	0	0	-18585530.277	-33164688.541
5039.380	9242.700	1	0	0	0	-13236939.446	-24277800.090
0	0	0	5208.79	9043.74	1	-24057942.549	-41770502.813
0	0	0	4833.49	9218.42	1	-26968022.441	-51433344.732
0	0	0	5000.00	9000.00	1	-20519900.000	-36935820.000
0	0	0	5166.91	9220.02	1	-30450564.056	-54337081.468
0	0	0	5039.38	9242.70	1	-29967681.046	-54963564.090

-L Sabit Terimleri

-4068.830	-1115.600	-2553.380	-3597.030	-2626.700
-4618.720	-5579.410	-4103.980	-5893.380	-5946.700

Dönüşüm bilinmeyenleri :

```
c1 = 7.45373689195003        c2 =-.9062013784551368
c3 =-26556.89079506695       c4 = .9040225581488812
c5 = 7.455463055963264       c6 =-67511.12156268582
c7 =-5.098633438227473D-07   c8 = 3.964091000105419D-07
```

Düzeltmeler

NOKTA	Vx	Vy
248	-0.0012m	-0.0004m
257	0.0010	0.0014
253	-0.0006	-0.0004
124	0.0035	-0.0006
125	0.0060	-0.0086

[vv]= 1.2832D-04 [vl]=-.23380D-08 l^Tl-l^TAx-.2338D-08

BİRİM ÖLÇÜNÜN ORTALAMA HATASI mo= 0.008m

BİLİNMEYENLERİN ORTALAMA HATALARI

Mc1 =	0.0041	Mc2 =	0.0004
Mc3 =	15.9685	Mc4 =	0.0006
Mc5 =	0.0043	Mc6 =	39.2835
Mc7 =	0.0000	Mc8 =	0.0000

dönüştürülen noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1	Y2	X2
248	9043.7400	5208.7900	4618.7196	4068.8288
257	9218.4200	4833.4900	5579.4135	1115.5996
253	9000.0000	5000.0000	4103.9794	2553.3810
124	9220.0200	5166.9100	5893.3860	3597.0314
125	9242.7000	5039.3800	5946.6914	2626.6994
251	9106.1700	5050.7100	4940.4369	2834.8160
289	9066.8600	4878.0900	4491.4494	1584.9530

Çözüm-2 : ötelenmiş koordinatları kullanarak

ortak noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1	Y2	X2
248	9043.74	5208.79	4618.72	4068.83
257	9218.42	4833.49	5579.41	1115.6
253	9000	5000	4103.98	2553.38
124	9220.02	5166.91	5893.38	3597.03
125	9242.70	5039.38	5946.7	2626.7

Dönüştürülecek noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1
251	9106.17	5050.71
289	9066.86	4878.09

Ağırlık merkezine ötelenmiş koordinatlar

248	-101.236	159.076	-609.718	1276.522
257	73.444	-216.224	350.972	-1676.708
253	-144.976	-49.714	-1124.458	-238.928
124	75.044	117.196	664.942	804.722
125	97.724	-10.334	718.262	-165.608

ötelenmiş koordinatlar

251	-38.806	.996
289	-78.116	-171.624

I.sistem ve II.sistem ağırlık merkezi koordinatları

9144.976 5049.714 5228.438 2792.308

A katsayılar matrisi

159.076	-101.236	1	0	0	0	-203064.014	129229.981
-216.224	73.444	1	0	0	0	-362544.511	123144.142
-49.714	-144.976	1	0	0	0	-11878.067	-34638.826
117.196	75.044	1	0	0	0	-94310.200	-60389.558
-10.334	97.724	1	0	0	0	-1711.393	16183.876
0	0	0	159.076	-101.236	1	96991.501	-61725.411
0	0	0	-216.224	73.444	1	75888.570	-25776.788
0	0	0	-49.714	-144.976	1	-55901.305	-163019.423
0	0	0	117.196	75.044	1	-77928.543	-49899.907
0	0	0	-10.334	97.724	1	7422.520	-70191.436

-L Sabit Terimleri

-1276.522	1676.708	238.928	-804.722	165.608
609.718	-350.972	1124.458	-664.942	-718.262

Dönüşüm bilinmeyenleri :

c1 = 7.447337245533568 c2 = -.9063561521898499
c3 = -8.234962035029517D-02 c4 = .9057368803054725
c5 = 7.44556896300867 c6 = 3.408960033468812D-02
c7 = -5.09307420994074D-07 c8 = 3.960441295989498D-07

Düzeltmeler

NOKTA	Vx	Vy
248	-.0013	-.0004
257	.0009	.0013
253	-.0006	-.0004
124	.0035	-.0006
125	.006	-.0086

[vv] = 1.2804D-04
[vl] = 1.2804D-04
$l^T l - l^T Ax$ 1.2804D-04

BİRİM ÖLÇÜNÜN ORTALAMA HATASI mo= 0.008m
BİLİNMEYENLERİN ORTALAMA HATALARI

Mc1 = 0 Mc2 = 0
Mc3 = .005 Mc4 = 0
Mc5 = 0 Mc6 = .005
Mc7 = 0 Mc8 = 0

dönüştürülen noktaların koordinatları

Nokta	Y1	X1	Y2	X2
248	9043.7400	5208.7900	4618.7196	4068.8287
257	9218.4200	4833.4900	5579.4135	1115.5996
253	9000.0000	5000.0000	4103.9794	2553.3809
124	9220.0200	5166.9100	5893.3860	3597.0313
125	9242.7000	5039.3800	5946.6914	2626.6994
251	9106.1700	5050.7100	4940.4369	2834.8159
289	9066.8600	4878.0900	4491.4495	1584.9529

Dönüşüm hesapları üzerine genel yorum :

Buraya kadar iki boyutlu düzlem dik koordinat sistemleri arasında benzerlik,afin ve projektif dönüşümün cebrik ve dengelemeli olarak nasıl yapılacağı uygulamalı olarak anlatılmıştır. Çözüm için verilen dengeleme modelleriyle aynı zamanda cebrik çözüm de yapılabilir. Bunun için düzeltme denklemlerinden sadece dönüşümün parametre sayısı kadar yazılması yeterlidir.

Afin ve projektif dönüşümler koordinat eksenlerinin her durumu için geçerlidir. Oysa benzerlik dönüşümünde eksen durumlarını dikkate almak yansıma olup olmadığına bakmak gerekir. Eğer yansıma varsa koordinat eksenlerinden birinin yönü değiştirilir (Y= -Y alınır) .

Hangi dönüşüm modelinin kullanılması gerektiği sorusuna eğer ortak nokta sayısı elveriyorsa genel modeller daha iyi sonuç verdiğinden projektif dönüşüm tercih edilmelidir. Dengelemede hesaplanan birim ölçünün ortalama hatası (m_o) ölçülerin hataları ile aynı zamanda kullanılan modele uygunluğunu gösterir. Yapılan sayısal uygulamalarda aynı ortak 5 nokta kullanılarak her üç yöntemde de dönüşüm yapılmış ve en küçük m_o değeri projektif çözümle elde edilmiştir.

Dönüştürülecek noktaların duyarlıkları; ortak nokta sayısına, ortak noktaların dağılımına ve dönüştürülecek noktanın ağırlık merkezine olan uzaklıklarına bağlıdır. Ortak noktaların dönüştürülecek noktaları çevrelediği ve homojen olarak dağıldığı durumlarda daha iyi sonuçlar alınabilmektedir. Dönüşüm işlemlerinde ortak noktalardan uzaklaşıldıkça duyarlık düşmektedir.

Dönüşüm hesabı sonucunda ortak nokta koordinatlarına getirilen düzeltmeler istatistiksel olarak test edilir. Kaba hatalı olan nokta koordinatları ortak nokta kümesinden çıkarılır.

Cebrik çözümler, ortak noktalardaki hataları direkt olarak dönüşüm sonucuna yansıtacağı ve denetim imkanı vermediği için zorunlu olmadıkça kullanılmamalıdır. Söz gelimi elimizde 4 ortak nokta varsa cebrik projektif çözüm yapılarak dönüşüm işlemi gerçekleştirilebilir. Ancak yukarıda bahsedilen sakıncalar nedeniyle (ortak nokta koordinatlarından birinde veya birkaçında kaba hata olabilir) dönüşüm işlemini dengelemeli olarak bir de afin veya benzerlik dönüşümüyle yapılması ve ortak nokta koordinatlarına gelen düzeltmelerin incelenmesi gerekir. Ortak nokta koordinatlarına gelen düzeltmelerden birinin ya da birkaçının diğer düzeltmelere oranla büyük sayısal değerler alması ilgili nokta koordinatlarında kaba hata olduğunun kuvvetli göstergesidir.

İki boyutlu Benzerlik, Afin ve Projektif koordinat dönüşüm hesaplarını bilgisayar ortamında cebrik veya dengelemeli yapabilmek için internet ortamındaki aşağıdaki link kullanılabilir.

http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/48996-least-square-coordinate-transformation-in-2d--similarity-affine-projective

UYUŞUMSUZ NOKTA KOORDİNATLARININ AYIKLANMASI

Genellikle koordinat dönüşüm hesaplamalarında bu problemle karşılaşılır. Örneğin benzerlik dönüşümünde iki ortak noktanın her iki sistemde koordinatlarının bilinmesi dönüşüm probleminin cebrik çözümü için yeterlidir. Koordinatlarda genelde çeşitli ölçümler sonucunda direkt ya da dolaylı olarak elde edildiklerinden bunlarında hatalı olmaları çok doğaldır. Bu nedenle cebrik çözümler yerine her zaman gereğinden fazla sayıda ölçümden yararlanarak istenenler dengelemeli olarak belirlenir. Söz konusu problem dengelemeli benzerlik dönüşümü hesabı olduğu için ortak nokta sayısının 2 den fazla olması gerekir. Ortak nokta koordinatlarındaki kaba hatalar dönüşüm hesaplarını olumsuz olarak etkiler. Bu amaçla koordinat dönüşüm hesabı sonucunda ortak noktalara getirilen düzeltmeler test edilir ve uyuşumsuz olduğuna karar verilen noktalar ortak nokta kümesinden çıkarılır.

BÖHYY nirengi ağlarının dengelenmesi işleminde ağda varsa kaba hatalı ve uyuşumsuz ölçülerin ayıklanmasını sonra ağın serbest dengelenmesini ve ağ içinde koordinatları önceden bilinen noktaların benzerlik dönüşümüyle bu serbest dengeleme sonucunda bulunan koordinatlara dönüştürülmesini koordinatlar arasında uyuşumsuz çıkan varsa (sabit noktalardan) bu noktalar sabit nokta kümesinden çıkarılır ve son olarak nirengi ağı koordinatları uyuşumlu olan eski sabit noktalara dayalı olarak dengelenir demektedir.

İki koordinat sistemi arasında p adet ortak noktayla yapılan dengelemeli benzerlik dönüşümünde birim ölçünün ortalama hatası aşağıdaki biçimde ortak nokta koordinatlarına dengeleme sonucu getirilecek düzeltmelerden hesaplanır.

$$m_o = \pm\sqrt{\frac{[v_x v_x + v_y v_y]}{2p-4}}$$

verilen nokta koordinatları arasında uyuşumsuz olan nokta koordinatlarını belirlemek amacıyla her noktaya ilişkin

$$q_i = 1 - \frac{1}{p} - \frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{[s^2]}$$

değerleri hesaplanır.

$[s^2] = [\Delta x^2 + \Delta y^2]$: ağırlık merkezine olan uzaklıkların kareleri toplamı

$$T_i = \pm\sqrt{\frac{v_{xi}^2 + v_{yi}^2}{2m_o^2 q_i}}$$

Test büyüklüğü $\alpha = 0.05$ yanılma olasılığı ile

$$C = \sqrt{(p-2)(1-\frac{\alpha}{p})^{1/(p-3)}}$$

kritik değerinden büyük çıkıyorsa yani $T_i > C$ ise ilgili noktanın x,y koordinatları uyuşumsuz sayılır.

ÖRNEK: Aşağıda her iki sistemde koordinatları bilinen dört ortak nokta ile benzerlik dönüşümü yapılmak isteniyor. Ortak noktalardan uyuşumsuz olanları belirleyiniz.

Ortak noktaların verilen koordinatları;

	(ESKİ)		(YENİ)	
NOKTA	***x***	***y***	***X***	***Y***
21	4259914.616	505373.450	4259914.087	505373.441
33	4269025.877	513746.981	4269025.778	513746.936
37	4253658.833	512683.092	4253658.766	512683.184
44	4259057.307	519688.849	4259057.325	519688.883

Benzerlik Dönüşümü Sonuçları

$$Y + v_Y = b_2 x + b_1 y + b_4$$

$$X + v_X = b_1 x - b_2 y + b_3$$

Ortak nokta sayısı p = 4

Dönüşüm katsayıları

b_1 = 1.000000365190032 b_2 = -0.000022480663184

b_3 = -13.2549 b_4 = 95.6085

ölçek katsayısı = 1.000000365442727
dönüklük = -0.001431^g
[s^2] = 225385827.2
[v_x v_x + v_y v_y] = 0.07636521

ortalama hata m_o = 0.1382m.

Eski koordinatların (***x, y***) dönüşümle elde edilen değerleri (***x', y'***)

	Eski koordinatlar		**Eski koor. dönüştürülmüş hali**	
NOKTA	**x**	**y**	**x'**	**y'**
21	4259914.616	505373.450	4259914.278	505373.476
33	4269025.877	513746.981	4269025.731	513746.806
37	4253658.833	512683.092	4253658.657	512683.262
44	4259057.307	519688.849	4259057.290	519688.900

Test büyüklüğü α= 0.05 yanılma olasılığı ile

$$C = \sqrt{(p-2)(1-\frac{\alpha}{p})^{1/(p-3)}} = 1.405$$

Her noktaya ilişkin (T) test büyüklüklerinin hesaplanması

Nokta	**Vy**	**Vx**	**q_i**	**T**	**C**	**SONUÇ**
21	0.035	0.191	0.498	1.407	1.405	UYUŞUMSUZ
33	-0.130	-0.047	0.414	1.098	1.405	UYUŞUMLU
37	0.078	-0.109	0.548	0.926	1.405	UYUŞUMLU
44	0.017	-0.035	0.548	0.269	1.405	UYUŞUMLU

yapılan test işlemi sonucu 21 nolu noktanın koordinatları uyuşumsuz çıkmıştır. Bu nedenle yapılacak son dönüşüm işleminde 21 nolu nokta ortak nokta olarak alınmamalıdır. Sırayla uyuşumsuz koordinat çiftlerinin atılması ile koordinat dönüşümü ve test işlemleri tekrarlanır. Bu aşamadan sonra ölçek uyuşumunu test etmek için

$$T = \frac{(k-1)[s^2]}{m_o^2}$$

Test büyüklüğü 1 ve (2p-4) serbestlik dereceli F(Fisher) dağılımında (1-α) test nivosuna göre sınır değeri

$F_{(1-\alpha);1,(2p-4)}$ ile karşılaştırılır.

T > F oluyorsa ölçek uyuşumsuzluğuna karar verilir. Yani her iki koordinat sisteminin ölçekleri arasında uyuşumsuzluk vardır. Durum incelenerek gerekli karar verilir.

ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

Jeodezi de ve fotogrametri de üç boyutlu dik koordinat sistemleri arasında dönüşüm problemiyle sıklıkla karşılaşılır. Çeşitli yöntemlerle üç boyutlu koordinat dönüşümlerini yapmak mümkündür. Dönüşüm yöntemleri olarak örneğin; en çok kullanılanlardan 7 parametreli üç boyutlu benzerlik dönüşümü, 10 parametreli üç boyutlu afin dönüşümü ve polinominal üç boyutlu dönüşüm olarak sayılabilir.

Üç Boyutlu Benzerlik Dönüşümü

İki üç boyutlu dik koordinat sisteminin birbirlerine göre durumları yedi datum parametresi ile açıklanabilir. Bunlar; koordinat eksenleri yönünde üç öteleme (t_x, t_y ,t_z) koordinat eksenleri etrafında üç dönüklük (ε,ψ,ω) ve koordinat sistemleri arasındaki bir ölçek (Δ) parametreleridir.

Bir P_i noktasının koordinatları (X,Y,Z) sisteminde $\underline{X}$ vektörü ve (x,y,z) sisteminde $\underline{x}$ vektörü ise aralarındaki ilişki,

$$\underline{X} = \underline{t}_o + \Delta\, \underline{R}\, \underline{x}$$

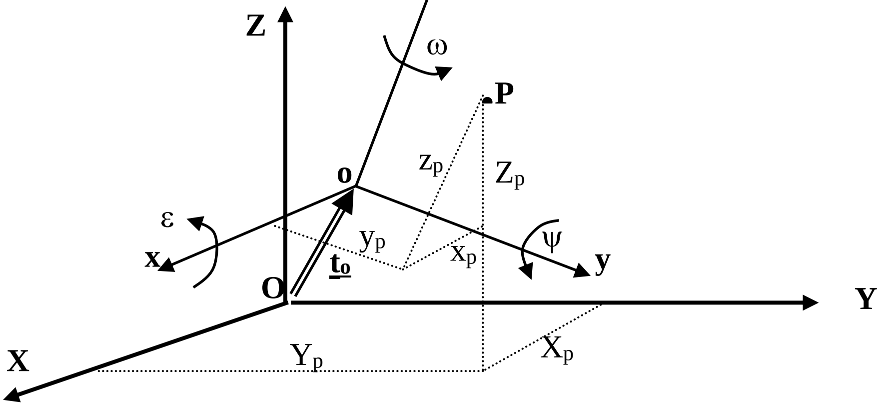
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P_i} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \Delta\,.\,\underline{R}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{P_i} \qquad R^* = \begin{bmatrix} 1 & w & -\psi \\ -w & 1 & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

bağıntısı ile tanımlanır . Burada,

$\underline{t_o}$: (x,y,z) dik koordinat sisteminin o başlangıç noktasının (X,Y,Z) sistemindeki koordinatları

$$\underline{t_o} = [t_x, t_y, t_z]^T$$

$\underline{R}$: x,y,z eksenleri etrafındaki pozitif (saat ibresinin hareketine ters yönde)ε,ψ,ω dönüklük açılarına bağlı dönüklük matrisidir. İki sistem arasında dönüklük açılarının çok küçük (diferansiyel anlamda) olmaları durumunda $\underline{R}$ dönüklük matrisi yerine R* matrisi kullanılabilir.



$\underline{R}$ dönüklük matrisi x,y,z eksenleri etrafındaki ε,ψ,ω dönüklük açılarının dönüşüm etkilerini gösteren,

$$\underline{R}_1(\varepsilon)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon\\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{bmatrix},\ \underline{R}_2(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{bmatrix},\ \underline{R}_3(\omega)=\begin{bmatrix}\cos\omega & \sin\omega & 0\\ -\sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

dönüklük matrislerinin ters sırada çarpımına eşittir

$$\underline{R}=\underline{R}_3(\omega)\underline{R}_2(\psi)\underline{R}_1(\varepsilon)$$

$$\underline{R}=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\omega & \cos\varepsilon\sin\omega+\sin\varepsilon\sin\psi\cos\omega & \sin\varepsilon\sin\omega-\cos\varepsilon\sin\psi\cos\omega\\ -\cos\psi\sin\omega & \cos\varepsilon\cos\omega-\sin\varepsilon\sin\psi\sin\omega & \sin\varepsilon\cos\omega+\cos\varepsilon\sin\psi\sin\omega\\ \sin\psi & -\sin\varepsilon\cos\psi & \cos\varepsilon\cos\psi\end{bmatrix}$$

İki üç boyutlu dik koordinat sistemi arasında dönüşüm yapabilmek için dönüşüm parametrelerinin (t_x, t_y ,t_z , Δ, ε, ψ, ω) bilinmesi gerekir. Her iki koordinat sisteminde üç koordinatı bilinen iki nokta ve başka bir noktanın tek koordinatı her iki sistemde de biliniyorsa cebrik çözüm yapılabilir. En az üç ortak noktanın bütün koordinatları varsa, söz konusu parametreler en küçük kareler yöntemi ile tek anlamlı olarak belirlenir.

Üç boyutlu benzerlik dönüşümümün temel eşitliği olan

$$\underline{X}=\underline{t_0}+\Delta\,\underline{R}\,\underline{x}$$

ifadesi bilinmeyenlere (dönüşüm parametrelerine) göre doğrusal olmadığı için bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri seçilerek Taylor serisine açılarak doğrusallaştırılır. Yaklaşık değerlerin uygun seçilmediği ya da seçilemediği durumlarda dengeleme işlemi tekrarlanır ,iterasyon yapılır. Dönüşüm parametrelerinin yaklaşık değerleri hakkında herhangi bir bilgi yoksa öteleme ve dönüklük parametreleri için (t_{xo}, t_{yo} ,t_{zo} , $\varepsilon_0,\psi_0,\omega_0$) sıfır değeri ölçek parametresi için de Δ_0=1 değeri alınabilir. Doğrusallaştırma için gerekli türev matrisler aşağıdaki gibi olur.

$$\underline{R}_\varepsilon=\frac{\partial\underline{R}}{\partial\varepsilon}=\begin{bmatrix}0 & -\sin\varepsilon\sin\omega+\cos\varepsilon\sin\psi\cos\omega & \cos\varepsilon\sin\omega+\sin\varepsilon\sin\psi\cos\omega\\ 0 & -\sin\varepsilon\cos\omega-\cos\varepsilon\sin\psi\sin\omega & \cos\varepsilon\cos\omega-\sin\varepsilon\sin\psi\sin\omega\\ 0 & -\cos\varepsilon\cos\psi & -\sin\varepsilon\cos\psi\end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_\psi=\frac{\partial\underline{R}}{\partial\psi}=\begin{bmatrix}-\sin\psi\cos\omega & \sin\varepsilon\cos\psi\cos\omega & -\cos\varepsilon\cos\psi\cos\omega\\ \sin\psi\sin\omega & -\sin\varepsilon\cos\psi\sin\omega & \cos\varepsilon\cos\psi\sin\omega\\ \cos\psi & \sin\varepsilon\sin\psi & -\cos\varepsilon\sin\psi\end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_\omega=\frac{\partial\underline{R}}{\partial\omega}=\begin{bmatrix}-\cos\psi\sin\omega & \cos\varepsilon\cos\omega-\sin\varepsilon\sin\psi\sin\omega & \sin\varepsilon\cos\omega+\cos\varepsilon\sin\psi\sin\omega\\ -\cos\psi\cos\omega & -\cos\varepsilon\sin\omega-\sin\varepsilon\sin\psi\cos\omega & -\sin\varepsilon\sin\omega+\cos\varepsilon\sin\psi\cos\omega\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Dönüşüm eşitliğinde yalnız II.sistemdeki koordinatları hatalı kabul edersek

$\underline{X} + v_X = \underline{t_0} + \Delta\, \underline{R}\, \underline{x}$

olur. Doğrusal olmayan bu eşitlik taylor serisine açılarak doğrusallaştırma yapılırsa aşağıdaki yapıda doğrusal düzeltme denklem sistemi elde edilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\left[E_{3x3}\,, R\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \Delta_0 \underline{R}_\varepsilon \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \Delta_0 \underline{R}_\psi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \Delta_0 \underline{R}_\omega \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \delta\Delta \\ \delta\varepsilon \\ \delta\psi \\ \delta\omega \end{bmatrix}}_{\delta x} + \underbrace{\begin{bmatrix} t_{x_0} \\ t_{y_0} \\ t_{z_0} \end{bmatrix} + (\Delta_0)\underline{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}}_{-l}$$

Yukarıda bir ortak nokta için yazılması gereken düzeltme denklemleri gösterilmiştir. Tüm ortak noktalar için bu düzeltme denklemleri yazılırsa,

$v = A\, \delta x - l$ şeklinde dolaylı ölçüler dengelemesinin doğrusallaştırılmış fonksiyonel modeli elde edilir.

Dengelemenin ilkesi [vv]= $v^T v$ = min. gereği

$A^T A \delta x - A^T l = 0$ *: normal denklemler*

$\delta x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T l$: δx bilinmeyenler vektörü,dönüşüm parametreleridir.

$\delta x = [\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta\Delta, \delta\varepsilon, \delta\psi, \delta\omega]^T$

hesaplanan dönüşüm parametreleri yaklaşık değerlere eklenerek kesin dönüşüm parametreleri bulunur.

$t_x = t_{x0} + \delta_x$	$t_y = t_{y0} + \delta_y$	$t_z = t_{z0} + \delta_z$
$\omega = \omega_0 + \delta\omega$	$\psi = \psi_0 + \delta\psi$	$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$
	$\Delta = \Delta_0 + \delta\Delta_0$	

Dönüşüm parametrelerinin başlangıçta seçilen yaklaşık değerleri yeterince uygun değilse hesaplanan bu parametreler dönüşüm eşitliğini sağlamayacaktır. Bu durumda

ilk dengeleme sonunda bulunan kesin dönüşüm parametreleri yaklaşık değerler alınarak dengeleme hesabı yenilenir yani iterasyon yapılır. İterasyon işlemine sonuç denetimleri tutuncaya kadar devam edilir. Başlangıçta alınan yaklaşık değerlerin uygunluğu iterasyon sayısını etkiler.

Dönüşüm parametreleri yeteri doğrulukta hesaplandıktan sonra dönüşüm için kurulan $v = A\,\delta x - l$ fonksiyonel modelde yerine konarak ortak nokta koordinatlarına getirilecek düzeltmeler hesaplanır. Yeni noktaların dönüştürülmesinde dengelemeli olarak bulunan dönüşüm parametreleri kullanılır. Gerekiyorsa dönüşüm işlemi için duyarlık hesapları yapılır.

Örnek:

Aşağıda (x,y,z) ve(X,Y,Z) sisteminde üç ortak noktanın koordinatları verilmektedir. İki koordinat sistemi arasında benzerlik dönüşümü yapabilmek için gerekli dönüşüm parametrelerini hesaplayınız. Yalnızca (x,y,z) sisteminde koordinatları verilen noktaların (X,Y,Z) sistemindeki koordinatlarını hesaplayınız.

Ortak nokta koordinatları:

Nokta	x1	y1	z1	X2	Y2	Z2
11	6432.58	7254.12	200.60	4208.8321	2111.9343	4182.9434
12	6354.37	5724.58	174.57	2034.5929	2073.9091	4924.8221
13	7221.44	6355.08	254.58	3397.0341	1919.6811	5773.119

Koordinatları dönüştürülmek istenen yeni noktaların koordinatları

Nokta	x1	y1	z1
13	7221.44	6355.08	254.58
44	4744.72	5555.54	381.09

ÇÖZÜM:

```
Ortak nokta sayısı=         3
Bilinmeyen sayısı =         7
ortak noktaların koordinatları
```

Nokta	x1	y1	z1	X2	Y2	Z2
11	6432.58	7254.12	200.6	4208.8321	2111.9343	4182.9434
12	6354.37	5724.58	174.57	2034.5929	2073.9091	4924.8221
13	7221.44	6355.08	254.58	3397.0341	1919.6811	5773.119

Dönüşüm parametrelerinin yaklaşık değerleri hakkında herhangi bir bilgi olmadığı için ölçek parametresi için 1 diğer 6 parametre için sıfır değeri alınmıştır.

$t_{xo}=0$ $t_{yo}=0$ $t_{zo}=0$ $\Delta_0=1$ $\varepsilon_0=0$ $\psi_0=0$ $\omega_0=0$

Dönüşüm parametrelerinin iterasyonla hesaplanması

İter.	t_{xo} (m)	t_{yo} (m)	t_{zo} (m)	Δ_0	ε_0 (rad)	ψ_0 (rad)	ω_0 (rad)
0	0	0	0	1	0	0	0
1	-4791.8175	7835.4798	-101.27620	0.19839	0.58347	1.31647	1.07974
2	-9450.2210	3769.7923	-551.42222	1.45074	6.82742	0.39041	-5.60749
3	-8163.5977	4830.0642	-1381.38137	1.20412	7.03380	1.17217	-5.52427
4	-9403.9291	3780.7651	-507.67229	1.48637	7.44765	1.13622	-5.81976
5	-9435.0960	3788.8295	-548.80330	1.49908	7.34922	1.13253	-5.74702
6	-9442.4963	3789.0630	-549.31742	1.49990	7.35136	1.13100	-5.74915
7	-9442.4964	3789.0639	-549.31737	1.49990	7.35135	1.13099	-5.74914
8	-9442.4964	3789.0639	-549.31737	1.49990	7.35135	1.13099	-5.74914

Yapılan 8 iterasyon sonunda hesaplanan dönüşüm parametreleri

t_x= -9442.4964m t_y= 3789.0639m t_z= -549.3173m

Δ = 1.4999

ε= 68.0014764^g , ψ= 72.00105963^g , ω= 33.998380^g

olarak bulundu.

A katsayılar matrisi

1.0000	0.0000	0.0000	9101.4326	-491.9493	-4073.2978	-1677.1230
0.0000	1.0000	0.0000	-1118.1570	-10617.8612	2408.7889	-13651.2332
0.0000	0.0000	1.0000	3155.0329	-2343.8718	12604.0682	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	7651.9345	-365.5861	-4711.8117	-1715.1423
0.0000	1.0000	0.0000	-1143.5049	-8378.8029	2786.3809	-11477.1319
0.0000	0.0000	1.0000	3649.6032	-1858.7667	10752.0496	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	8560.2962	-321.2723	-5442.1886	-1869.4021
0.0000	1.0000	0.0000	-1246.3516	-9300.6299	3218.2972	-12839.5831
0.0000	0.0000	1.0000	4215.3274	-2097.5048	12003.3087	0.0000

-L Sabit terimleri

-0.0953 0.0067 -0.0288 0.0427 0.0126 -0.1018 0.0526
-0.0192 0.1306

Ortak nokta koordinatlarına getirilmesi gereken düzeltmeler (m.)

Nokta	Vx	Vy	Vz
11	-9.52D-02	6.65D-03	-2.88D-02
12	4.26D-02	1.25D-02	-.10185
13	5.26D-02	-1.92D-02	.13063

Yeni noktaların dönüşüm sonucunda hesaplanan koordinatları

Nokta	x1	y1	z1	X2	Y2	Z2
13	7221.44	6355.08	254.58	3397.0867	1919.6619	5773.2496
44	4744.72	5555.54	381.09	936.5790	2896.7309	2898.2951

Dönüşüm duyarlık hesapları

$[ll]=l^Tl=$ 4.249D-02
$l^TAx=$-4.29D-13

$v^Tv=$ 4.249D-02

$v^Tl=$ 4.249D-02

$v^Tv=l^Tl-l^TAx$ 4.249D-02

Birim ölçünün ortalama hatası m_o = 0.14576m

Bilinmeyenlerin (dönüşüm parametrelerinin) ortalama hataları

Mtx = 1.0603m Mty = 1.6671m Mtz = 1.0846m
MΔ=1.13D-04
Mε = 2.87D-04 Mψ = 9.64D-05 Mω = 3.05D-04